UCLouvain

FIAL

Un éventail de formations, une multitude d'horizons

Kant et la géométrie non-euclidienne

LFILO 1220

séance 11

Les arguments transcendantaux de Kant

Les **conditions de possibilité** de notre expérience et notre connaissance. Donc, dans ce contexte :

> Comment doit notre expérience être structurée par rapport à l'espace afin que cette expérience et notre connaissance de l'espace soient possibles ?

L'espace chez Leibniz

L'espace absolu de Newton est métaphysiquement impossible.

Seulement **les choses** existent, qui sont reliés les uns les autres par des relations spatiales (e.g., « A et B sont séparés par X unités de distance », « A est en-dessus de B », etc.).

Une conception de l'espace « relationniste ».

L’argument de Kant

Imaginez un univers qui ne contient qu’une seule main. Les **relations internes** entre les parties de la main **ne peuvent pas nous dire** si cette main est une main gauche ou droite.

L'argument de Kant

> …la figure d'un corps [comme une main] peut être tout à fait semblable à la figure d'un autre, et la grandeur de leurs dimensions [c'est-à-dire interne, relative] tout à fait égale, et qu'il subsiste cependant une différence interne, à savoir qu'il est impossible que la superficie qui enferme l'une puisse enfermer la seconde. (*QOP*, p. 97)

L'argument de Kant

> Mais ce fondement interne de la diversité ne saurait être mis au compte d'une disposition différente dans la liaison des parties du corps les unes par rapport aux autres, car, d'après les exemples cités, tout peut être, à cet égard, totalement identique. (*QOP*, p. 97)

L'argument de Kant

Donc, un espace relationniste n'est pas possible. Dans un tel espace,

> cette main serait, eu égard à une tell propriété, tout à fait indéterminée, c'est-à-dire qu'elle pourrait convenir à chaque partie du corps, ce qui est impossible. (*QOP*, p. 98)

Peut-on resister ?

Kant dit que c'est une évidence que cette main doit être soit une main gauche soit un main droite.

Mais est-il véritablement le cas ? Dans un tel univers avec qu'une seule main, comment dire que cette main est gauche ou droite ? Qu'est-ce que ça veut dire, même ?

La conclusion

Kant, ici (en 1768) : Alors, l’espace absolu de Newton existe.

Mais, Kant quelques ans après (dans la *Critique de la raison pure*, 1781), après exactement le même argument : Alors, ma théorie critique de l’espace (**très** différente !) doit être vraie.

La conclusion

Et on n’a toujours presque aucune idée d’en quoi consiste cet espace absolu :

> …bien que les difficultés entourant son concept ne manquent pas, lorsqu’on veut saisir sa réalité par des idées de la raison alors qu’elle est accessible suffisamment par intuition grâce au sens interne. (*QOP*, p. 98)

La vision de la *Critique*

- L'espace et le temps sont les « formes de l'intuition » ou « formes de la sensibilité » (externe et interne, respectivement)
  - Autrement dit, l'espace est ce qui forme, ou ce qui est nécessaire pour, toutes nos intuitions extérieures. Sans l'espace, aucune perception des phénomènes comme externes à nous serait possible.
- C'est comme ça que Kant peut décrire la géométrie et la mathématique **synthétique a priori** :
  - elles sont synthétiques — parce qu'ils concernent le monde externe
  - mais elles sont a priori — nécessairement vraies, pour toujours, parce que sans elles les perceptions ne sont pas possibles

La vision de la *Critique*

Le temps et l'espace ne sont donc ni des concepts de l'entendement ni des intuitions d'objets offerts à la sensibilité, mais ce qui conditionne l'application ou le remplissement des uns par les autres. Ils ne sont pas représentables mais ils sont au fondement de toute représentation. Ils sont a priori et transcendantaux, puisqu'ils rendent la connaissance et la science possibles. (Besnier, p. 34)

La géométrie dans la *Critique*

- Si la géométrie euclidienne est a priori, alors, la théorie d'Euclide a une position très importante dans la vision de la connaissance et la pensée chez Kant.

> La géométrie est une science qui détermine synthétiquement, et pourtant *a priori*, les propriétés de l'espace. Que doit donc être la représentation de l'espace pour qu'une telle connaissance en soit possible ? (*CRP*, B 40, p. 787)

> Notre explication fait donc seule comprendre la *possibilité de la geométrie* comme connaissance synthétique *a priori*. (*CRP*, B 41, p. 788)

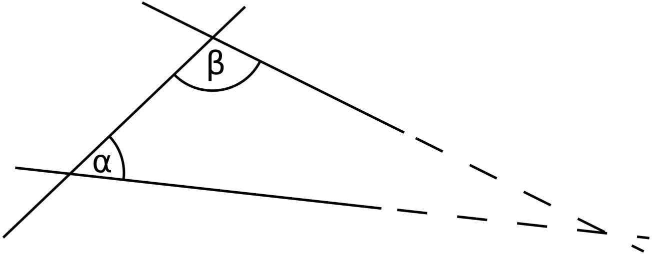
Les postulats d'Euclide

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

Le cinquième postulat

Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d’un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

Le cinquième postulat



« Démontrer » le cinquième postulat

- Ptolémée (~150 CE)
- Proclus (~450 CE)
- Alhazen (~1000 CE)
- Omar Khayyam (~1100 CE)
- Vitale Giordano (1680)
- Jean-Henri Lambert (1766) – n’arrive pas à une contradiction

Assertions équivalentes

1. Il existe au maximum une ligne droite qui peut être tracée parallèle à une autre passant par un point donné.
2. La somme des angles de tout triangle est 180°.
3. Il existe un triangle dont la somme des angles est 180°.
4. Il existe une paire de triangles qui sont semblables mai pas congruents.
5. Il existe un rectangle.
6. La propriété d'être parallèle est transitive.
7. La théorème de Pythagore.
8. Il n'y a pas de limite supérieure de l'aire d'un triangle.
9. Si une ligne intersecte une parmi une paire de lignes parallèles, elle intersecte aussi l'autre.

La grande découverte

- Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1829/1840) : géométrie hyperbolique
- János Bolyai (1831) : géométrie hyperbolique
- Bernhard Riemann (1854/1868) : géométrie hyperbolique et elliptique, ainsi que leur généralisation algébrique
- Henri Poincaré (1921) : premiers résultats spéculatifs de la relativité générale

Okay.

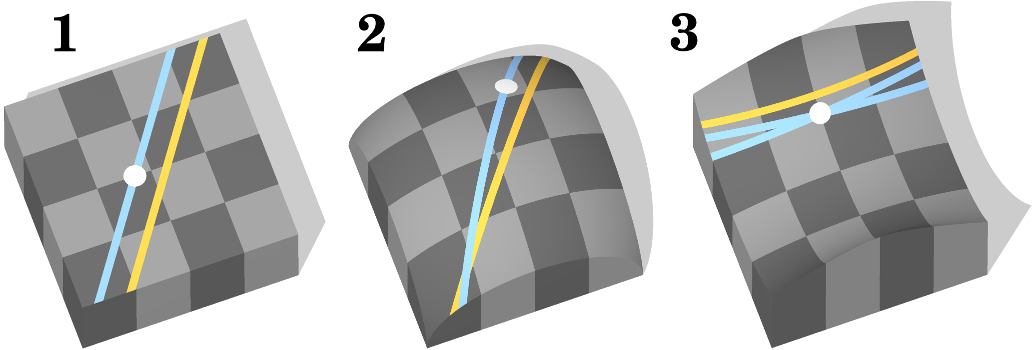
Et maintenant ? Sont-elles vraiment des « bonnes » géométries ?

L'interprétation de la géométrie

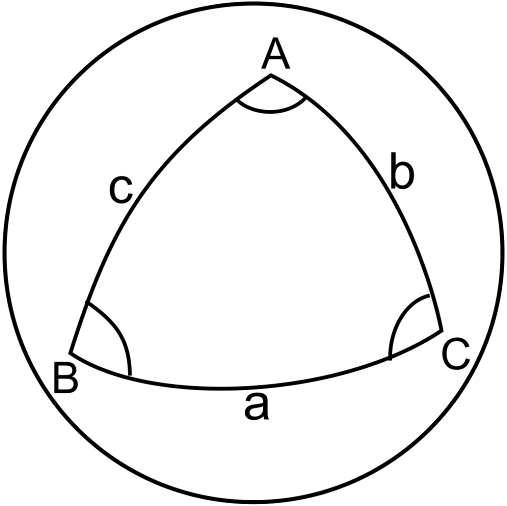
Si nous « interprétons » toutes les observations de la géométrie non-euclidienne, comme l'a décrit Henri Poincaré :

> Prenons ensuite les théorèmes de Lobatchevsky et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand−français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire.* [...] Ainsi, quelque loin que l'on pousse les conséquences des hypothèses de Lobatchevsky, on ne sera jamais conduit à une contradiction. (Poincaré, 1905)

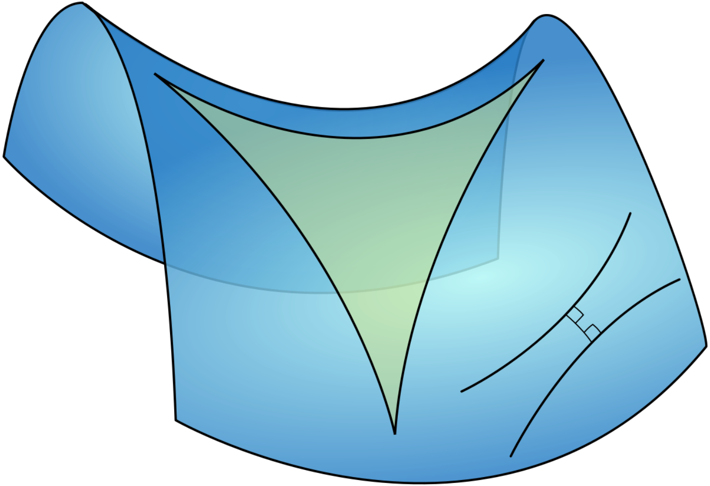
Les géométries non-euclidiennes



La géométrie elliptique



La géométrie hyperbolique



Comment étions-nous si perdus ?

Selon Poincaré, il y a trop de « prémisses que les géomètres admettent sans les énoncer ».

- La géométrie euclidienne depend de « glisser » une forme dans un plan **sans** la déformer.
  - Donc quand on glisse quelque chose, ça se passe sans changer les angles ou le longueur des côtés
  - Mais **c'est impossible de faire cela dans la géométrie hyperbolique**
- Autrement dit, il y a **toute une théorie du mouvement** caché dans la géométrie euclidienne !

Quid de Kant ?

Donc, qu’est-ce que l’importance de l’existence des géométries non-euclidiennes pour la théorie de Kant ?

Quid de Kant ?

Kant pensait que la géométrie euclidienne était une connaissance synthétique a priori : qu'elle était à la fois véritablement informative et nécessairement vraie. Nous avons vu que l'existence de géométries non euclidiennes cohérentes démontre que la vérité de la géométrie euclidienne n'est pas une nécessité logique. (Huggett, p. 233, tr.)

Quid de Kant ?

Une façon possible de comprendre une telle position à la lumière de la géométrie non-euclidienne est d'affirmer que toutes nos expériences et tous nos concepts de l'espace doivent toujours être euclidiens. [...] Cependant, même cette affirmation ne semble pas correcte, car il existe des tests expérimentaux de géométrie...qui semblent s'appuyer sur la possibilité de faire l'expérience d'une géométrie non euclidienne. (Huggett, p. 233, tr.)